Suites arithmétiques et géométriques

Exercice 1

1. Calculer la somme des 500 premiers entiers naturels non nuls.

$1+2+3+\dots+500 = \sum_{i=1}^{500} i = \frac{(1+500)\times 500}{2} = 125250$

2. Calculer la somme des entiers de 35 à 150.

$35+36+\dots+150 = \frac{(35+150)\times 116}{2} = 10730$ $\quad 150-35+1=116$

$\frac{(35+150)\times 116}{2}$ 10730

Exercice 2

Soit (u_n) la suite arithmétique de raison 3 et de premier terme $u_0 = 5$. $\quad U(0)=5$

1. Exprimer u_n en fonction de n puis en déduire u_{15}.
2. Calculer $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{15}$.

1. $U(n) = U(0) + r\times n = 5 + 3\times n \quad U(15) = 5+3\times 15 = 50$

2. $S = U(0) + U(1) + \dots + U(15) = \frac{5+50}{2}\times 16 = 440$

Exercice 3

Soit (u_n) la suite arithmétique telle que $u_3 = 5$ et $u_{14} = 39$.

1. Déterminer le nombre de termes de u_3 à u_{14}.
2. Calculer $S = u_3 + u_4 + \dots + u_{14}$.

1. 12 termes de $U(3)$ à $U(14)$.

2. $S = \frac{5+39}{2}\times 12 = 264$

Exercice 4

Une personne qui n'a aucune pratique sportive décide au cours d'un mois de 30 jours de faire chaque jour 5 minutes de sport de plus que le jour précédent.

On modélise cette situation par une suite (t_n) où t_n est le temps consacré par cette personne à faire du sport le n-ième jour de ce mois.

1. Déterminer t_1 et t_2.
2. Déterminer la nature de la suite (t_n).
3. Exprimer t_n en fonction de n.
4. Déterminer le temps consacré à faire du sport le trentième jour.
5. Calculer $S = t_1 + t_2 + \dots + t_{30}$.
6. Interpréter ce dernier résultat.

1. $t(0) = 0$ $t(1) = 5$ $t(2) = 10$

2. t est une suite arithmétique de premier terme $t(0)=0$ et de raison 5

3. $t(n) = 0 + 5 \times n = 5n$ 4. $t(30) = 5 \times 30 = 150$ mn $= 2$h30mn

5. $S = \frac{(5+150) \times 30}{2} = 2325$

6. La personne a fait 2325mn (1j14h45mn) de sport dans le mois.

Exercice 5

Dans une ville, le prix du m^3 d'eau a augmenté de la façon suivante : il coûtait 3,20 euros le 1er janvier 2018, 3,36 euros le 1er janvier 2019 et 3,55 euros le 1er janvier 2020.

Peut-on modéliser l'évolution du prix du m^3 d'eau par une suite géométrique ?

2018	2019	2020
3,20	3,36	3,55

$\times 1,05$ $\times 1,056$

$\frac{3.55}{3.36}$ 1.056548

Une modélisation par une suite géométrique est vraisemblable.

Exercice 6

Une entreprise place un capital de 10 000 euros à intérêts composés au taux annuel de 3 %. Cela signifie que chaque année, le capital augmente de 3 %.

On note C_n la valeur acquise par le capital au bout de n années.

1. Calculer C_1 et C_2.
2. Indiquer la nature de la suite des capitaux (C_n).
3. Exprimer le terme général C_n en fonction de n.
4. Calculer la valeur acquise par le capital au bout de 10 ans.

1. augmenter de 3% revient à multiplier par 1,03

$C(0) = 10000$ $C(1) = 10\,000 \times 1,03 = 10\,300$ $C(2) = 10300 \times 1,03 = 10\,609$

2. Suite géométrique $C(0) = 10000$ $r = 1,03$

3. $C(n) = 10\,000 \times 1,03^n$ 4. $C(10) = 10000 \times 1,03^{10} = 13439,16$

Exercice 7

Un atelier fabrique 250 paires de lunettes par semaine. Au 1er janvier 2019, il reçoit une commande de 7 500 pièces pour début juin. Le chef d'atelier compte réaliser cette commande en 24 semaines.

1. Ce délai est-il suffisant ? Justifier la réponse.
2. Le chef d'atelier décide d'augmenter la production de 5 % par semaine. On note u_n le nombre de paires de lunettes produites la n-ième semaine.
   a. Calculer u_1 et u_2.
   b. Déterminer la nature de la suite (u_n).
   c. Exprimer le terme général u_n en fonction de n.
3. Conclure.

1. $24 \times 250 = 6000$ ∴ ce délai n'est pas suffisant $(6000 < 7500)$

2 a) $u(0) = 250$ $u(1) = 250 \times 1,05 = 262$ $u(2) = 275$

b) u est une suite géométrique c) $u(n) = 250 \times 1,05^n$

3. $u(0) + u(1) + \cdots + u(23) = 250 \times \frac{1 - 1,05^{24}}{1 - 1,05} = 11125$ ∴ c'est donc assez !

Exercice 8

PARTIE A.

En France depuis 2016, les ventes de véhicules hybrides ont fortement augmenté. Le tableau ci-dessous donne le nombre de véhicules hybrides vendus en France par année :

×1,43 ×1,43

Année	2016	2017	2018
Nombre de véhicules	7 420	11 010	15 350

×1,48 ×1,39

1. Déterminer le pourcentage d'évolution entre 2016 et 2017, puis entre 2017 et 2018.
2. Déterminer la moyenne géométrique de $1,48$ et $1,39$.
3. Quel est le taux moyen annuel d'évolution entre 2016 et 2018 ?

1. $\frac{11010}{7420} = 1,48$ augmentation de 48 % ; $\frac{15350}{11010} = 1,39$ ~~1~~ 39 %

2. $\sqrt{1,48 \times 1,39} = 1,43$

3. Taux moyen d'évolution 43 %

PARTIE B.

On suppose qu'à partir de 2018, les ventes de voitures hybrides augmentent de 43 % par an et que cette évolution va se poursuivre.

On modélise par la suite (u_n) l'évolution des ventes où la partie entière de u_n représente le nombre de voitures hybrides vendues au cours de l'année $2018 + n$.

1. **a.** Que vaut u_0 ? $u(0) = 15350$

   b. Calculer u_1 et u_2. $u(1) = 15350 \times 1,43 = 21950$ $u(2) = 21950 \times 1,43 = 31389$
2. Quelle est la nature de la suite (u_n) ?
3. Exprimer u_n en fonction de n.
4. Selon ce modèle, combien de voitures hybrides seront vendues en 2023 ?

2) u est une suite géométrique $u(0) = 15350$ $r = 1,43$

3) $u(n) = 15350 \times 1,43^n$

4) $u(5) = 15350 \times 1,43^5 = 91788$

Exercice 9

L'entreprise Iron SA exploite un filon de minerai de fer depuis 1950.

La première année d'extraction l'entreprise a récupéré 20 000 tonnes de fer. Cependant depuis 1950, en raison de difficultés croissantes d'extraction, de l'appauvrissement du filon, les quantités extraites diminuent de 1 % par an.

On appelle T_n le nombre de tonnes extraites l'année $(1950 + n)$. On a donc $T_0 = 20\,000$.

Les résultats seront arrondis à la tonne.

1. Justifier que $T_1 = 19\,800$ puis calculer T_2 et T_3.

2. Exprimer T_{n+1} en fonction de T_n.

3. Quelle est la nature de la suite (T_n) ? En déduire l'expression de T_n en fonction de n.

4. Quelle est la quantité extraite en 2008 ?

5. Montrer que la quantité totale extraite entre l'année 1950 et l'année $(1950 + n)$ est :

$$S_n = 2\,000\,000 \times \left(1 - 0,99^{n+1}\right)$$

6. En 1950, les géologues estimaient que ce filon recelait 1 000 000 tonnes de métal. En quelle année, théoriquement, le filon sera-t-il épuisé ?

Exercice 10

Cet exercice est composé de deux parties indépendantes l'une de l'autre.

PARTIE A. LES ÉCONOMIES

Afin de se constituer un capital, un épargnant place 1 000 euros sur un compte non rémunéré et, chaque mois, verse 75 euros sur ce compte.

On note u_n le montant en euros du capital accumulé au bout de n mois. Ainsi $u_0 = 1\,000$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. Déterminer la nature de la suite (u_n) en justifiant la réponse.
3. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
   Au bout de combien de temps le capital accumulé est-il supérieur à 3 500 euros ? Justifier la réponse.

PARTIE B. LES DÉPENSES

Cet épargnant doit surveiller ses dépenses. En janvier 2014 il a dépensé 660 € et, jusqu'à présent, ses dépenses ont augmenté chaque mois de 4 %. On suppose que cette évolution va se poursuivre à l'avenir.

Cette évolution conduit à modéliser le montant en euros des dépenses mensuelles au cours du n-ième mois après janvier 2014 par le terme v_n d'une suite géométrique. Ainsi $v_0 = 660$.

Dans cette partie, les résultats seront arrondis au centime d'euro.

1. Justifier que $v_1 = 1,04 v_0$. Calculer v_3 et interpréter le résultat.
2. Calculer le montant des dépenses au mois de décembre 2014.
3. Selon ce modèle, quand l'épargnant devrait-il doubler ses dépenses par rapport à janvier 2014 ?