Suites ...
Rappels de cours et exercices

Rappels de cours

- **Suites arithmétiques**
  Une suite (u_n) est arithmétique si on passe d'un terme au suivant en ajoutant toujour un même nombre, appelé la raison de la suite.
  Exemple 1 : $u_0 = 5$; $u_1 = 7$; $u_2 = 9$; $u_3 = 11$; ...(raison 2)
  Exemple 2 : $v_0 = 10$; $v_1 = 7$; $v_2 = 4$; $v_3 = 1$; ...(raison -3)
  Formules :
  (u_n) est une suite arithmétique de raison r

  $\boxed{u_n = u_0 + n \times r}$
- **Suites géométriques**
  Une suite (u_n) est géométrique si on passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par un même nombre, appelé la raison de la suite.
  Exemple 1 : $u_0 = 5$; $u_1 = 15$; $u_2 = 45$; $u_3 = 135$; ...(raison 3)
  Exemple 2 : $v_0 = 100$; $v_1 = 20$; $v_2 = 4$; $v_3 = 0{,}8$; ...(raison $0{,}2$)
  Formules :
  (u_n) est une suite géométrique de raison r

  $\boxed{u_n = u_0 \times r^n}$

Exercice 1 :
Antoine dispose de 3000 € qu'il place à intérêts simples [1] au taux annuel de 5%. On note A_0 le capital de départ et A_n la somme constituée du capital de départ et de tous les intérêts perçus après n années de placement.
Bertrand dispose de 3000 € qu'il place à intérêts composés [2] au taux annuel de 4%. On note B_0 le capital de départ et B_n la somme dont disposera Bertrand au bout de n années de placement.

1. **a.** Calculer A_1 et A_2.
   b. Exprimer A_{n+1} en fonction de A_n.
   c. Quelle est la nature de la suite (A_n) ?
   d. En déduire l'expression de A_n en fonction de n.
   e. De quelle somme (capital + intérêts perçus) disposera Antoine s'il laisse son argent placé pendant 10 ans ?
2. **a.** Calculer B_1 et B_2.
   b. Exprimer B_{n+1} en fonction de B_n.
   c. Quelle est la nature de la suite (B_n) ?
   d. En déduire l'expression de B_n en fonction de n.
   e. De quelle somme disposera Bertrand s'il laisse son argent placé pendant 10 ans ?
3. À partir de combien d'année pourra-t-on affirmer que Bertrand a fait le bon choix ?

---

1. Les intérêts sont dits « simples »lorsqu'ils sont perçus et ne produisent pas eux-mêmes des intérêts les années suivantes.
2. Les intérêts sont dits « composés »lorsqu'à la fin de chaque année les intérêts produits sont ajoutés au capital. Ils produisent alors aux-mêmes des intérêts au cours des années suivantes.

Exercice 2 :

1. Soit (u_n) une suite arithmétique de raison $r = 2$ et de premier terme $u_0 = -7$. Écrire la définition par récurrence de cette suite. Calculer u_1, u_2. Exprimer u_n en fonction de n, puis calculer u_{10} et u_{99}.
2. Soit (u_n) une suite arithmétique de raison $r = \frac{2}{5}$ et telle que $u_8 = 0$. Calculer u_0. Exprimer u_n en fonction de n, puis calculer u_{12} et u_{999}.
3. Soit (u_n) une suite arithmétique telle que $u_0 = -10$ et $u_5 = 0$. Calculer la raison de cette suite. Exprimer u_n en fonction de n, puis calculer u_{25} et u_{2005}.
4. Soit (u_n) une suite arithmétique telle que $u_8 = 10$ et $u_{14} = 6$. Calculer la raison de cette suite. Calculer u_0. Ecrire la définition par récurrence de cette suite, puis exprimer u_n en fonction de n. Enfin calculer u_{303} et u_{2005}.

Exercice 3 :

1. Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q = 1,2$ et de premier terme $u_0 = 3$. Écrire la définition par récurrence de cette suite. Calculer u_1, u_2. Exprimer u_n en fonction de n, puis calculer u_6 et u_{10}.
2. Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q = 2$ et telle que $u_4 = 48$. Calculer u_0. Exprimer u_n en fonction de n, puis calculer u_6 et u_{12}.
3. Soit (u_n) une suite géométrique telle que $u_0 = -10$ et $u_3 = 1,25$. Calculer la raison de cette suite. Exprimer u_n en fonction de n, puis calculer u_1 et u_7.
4. Soit (u_n) une suite géométrique telle que $u_{20} = 45$ et $u_{23} = 5625$. Calculer la raison de cette suite. Calculer u_0. Écrire la définition par récurrence de cette suite, puis exprimer u_n en fonction de n. Enfin calculer u_{17} et u_{27}.
5. Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = 2500$ et de raison $q = 1,04$. Calculer u_1, u_2 et u_{15} (arrondir au centième). Déterminer à l'aide de la calculatrice le plus petit rang n pour lequel $u_n \geqslant 5000$.

Exo 1

1) $3000 \times \frac{5}{100} = 150$

...

e) $A_{10} = 3000 + 10 \times 150$

$= 4500$

2)

$B_1 = 3000 \times 1,04 = 3120$

$B_2 = 3120 \times 1,04 = 3244,80$

b) $B_{n+1} = B_n \times 1,04$

c) (B_n) est une suite géométrique car on passe d'un terme au suivant en multipliant par 1,04

d) $B_n = B_0 \times r^n$

$B_n = 3000 \times 1,04^n$ ← « B_0 en fonction de n »

e) $B_{10} = 3000 \times 1,04^{10} = 4440,73$

③ Par le tableur ou la calculatrice :

$A_{11} = 4650$ $B_{11} = 4618$

$A_{12} = 4800$ $B_{12} = 4803$

$A_{13} = 4950$ $B_{13} = 4995$

Exercice 2

1) $U_{n+1} = U_n - 7$ ← « définition par récurrence »

$U_0 = -7$ $U_1 = -7+2 = -5$ $U_2 = -5+2 = -3$

$U_n = U_0 + n \times r$

$U_n = -7 + 2n$

$U_{10} = -7 + 2 \times 10 = 13$ $U_{99} = -7 + 2 \times 99 = 191$

Exercice 3

1) $U_{n+1} = U_n \times 1{,}2$

$U_0 = 3$ $\quad U_1 = 3 \times 1{,}2 = 3{,}6$ $\quad U_2 = 3{,}6 \times 1{,}2$
$= 4{,}32$

$U_n = U_0 \times 1{,}2^n$

$U_n = 3 \times 1{,}2^n$

$U_6 = 3 \times 1{,}2^6 \approx 8{,}95$ $\quad U_{10} = 3 \times 1{,}2^{10} \approx 18{,}57$

Ex 2, 3) SA

$U_0 = -10$ $\quad U_5 = 0$

$U_n = U_0 + n \times r$

$U_5 = U_0 + 5 \times r$

$0 = -10 + 5r$

$10 = 5r$

$\frac{10}{5} = r$

$r = 2$

4) $U_8 = 10$ $\quad U_{14} = 6$

$U_8 = U_0 + 8 \times r$ $\quad U_{14} = U_0 + 14 \times r$

$10 = U_0 + 8r$ $\quad 6 = U_0 + 14r$

$U_0 = 10 - 8r$ $\quad U_0 = 6 - 14r$

$10 - 8r = 6 - 14r$

$-8r + 14r = 6 - 10$

$6r = -4$

$r = -\frac{4}{6}$ $\quad r = -\frac{2}{3}$

$10 = u_0 + 8 \times \frac{-2}{3}$

$10 = u_0 - \frac{16}{3}$ $\qquad u_0 = 10 + \frac{16}{3} = \frac{46}{3}$

Exercice 3

2) SG $r = 2$ $\qquad u_4 = 48$ $\qquad u_0 = ?$

$u_4 = u_0 \times r^4$

$48 = u_0 \times 2^4$

$48 = u_0 \times 16$

$u_0 = \frac{48}{16}$

$u_0 = 3$

Vérification

$u_0 = 3$

$u_1 = 6$

$u_2 = 12$

$u_3 = 24$

$u_4 = 48$

3) $u_0 = -10$ $\qquad u_3 = 1{,}25$

$u_3 = u_0 \times r^3$

$1{,}25 = -10 \times r^3$

$r^3 = \frac{1{,}25}{-10}$

$r^3 = -0{,}125$

$r = -0{,}5$

5) $u_0 = 2500$ $\qquad r = 1{,}04$ $\qquad n$ pour $u_n > 5000$

$u_{18} = u_0 \times 1{,}04^{18}$

$= 2500 \times 1{,}04^{18}$

$= 5064$