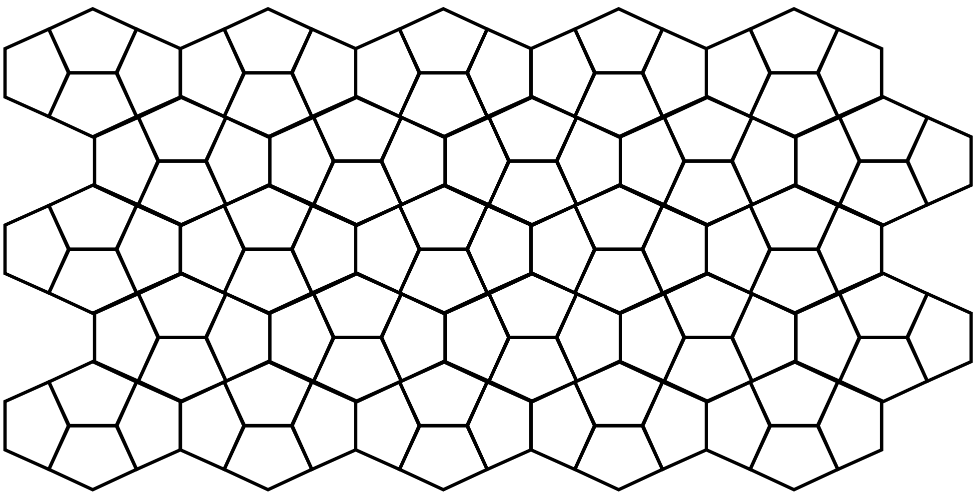
Lycée Auguste Renoir
Terminale STD2A 2

Mathématiques
12 octobre 2017

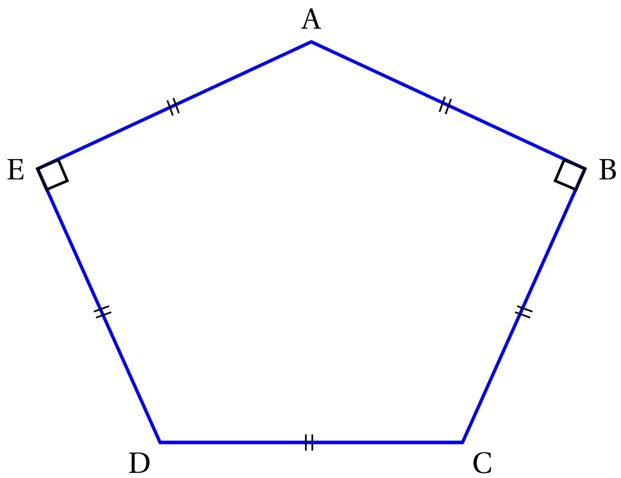
Exercices Pavages (2)

Exercice 1

Certaines rues de la ville du Caire sont pavées d'une façon bien particulière. En géométrie, on parle ainsi de « pavages du Caire ». À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, on a construit un « pavage du Caire » représenté ci-dessous.



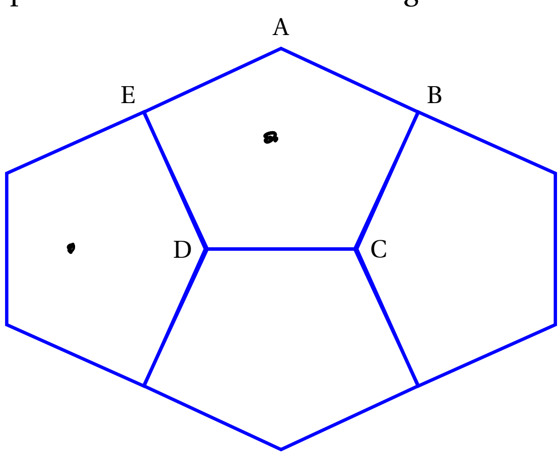
Dans cet exercice, on étudie le cas particulier où le pentagone qui constitue le motif élémentaire de ce type de pavage possède deux angles droits et cinq côtés de même longueur comme sur la figure ci-dessous.



Partie A : Le pentagone

Partie B : Le pavage

1. Quatre pentagones identiques permettent de former un hexagone comme le montre la figure ci-dessous.



a. Quelles transformations permettent d'obtenir cet hexagone à partir du pentagone ABCDE ?

3 transformations :
- symétrie axiale d'axe (DC)
- rotation de centre E et d'angle 90° (sens horaire)
- rotation de centre B et d'angle 90° (sens antihoraire).

b. L'hexagone obtenu précédemment permet de paver le plan comme le montre la figure de **l'annexe 3 à rendre avec la copie**. Définir, à l'aide des points A, A_1, A_2, A_3, A_4 et A_5, les vecteurs des translations qui permettent de paver le plan à partir de cet hexagone.

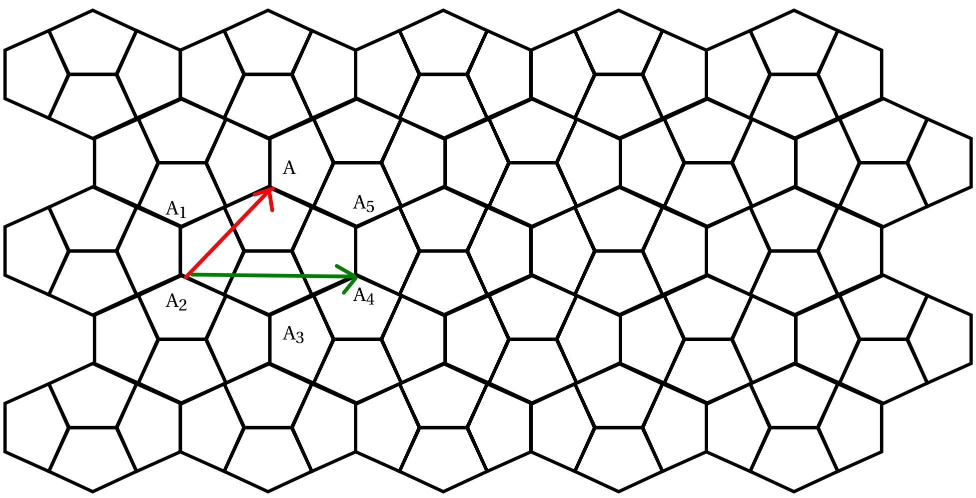
Ces vecteurs sont :
- $\overrightarrow{A_2A}$
- $\overrightarrow{A_2A_4}$

2. Identifier une autre façon de regrouper quatre pentagone identiques pour réaliser un motif qui permette de paver le plan en utilisant uniquement des translations.

*On repassera en couleur ce motif sur la figure de l'**annexe 3 à rendre avec la copie**.*

Annexe 3 à rendre avec la copie

EXERCICE 3 – Partie B



Exercice 2

Un parquet est composé de pièces de bois de forme identique (figure 3), appelées dans la suite « élément de base T ».

Le recouvrement du sol par ce parquet est une situation de pavage du plan.

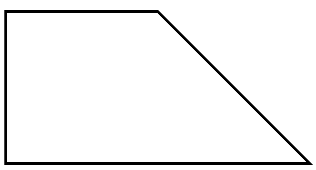


Figure 3 - élément de base T

Dans un repère orthonormé du plan (O ; I ; J) la pièce de bois est représentée par le trapèze rectangle OABJ (figure 4). Les points A et B ont pour coordonnées : A(2 ; 0) et B(1 ; 1).

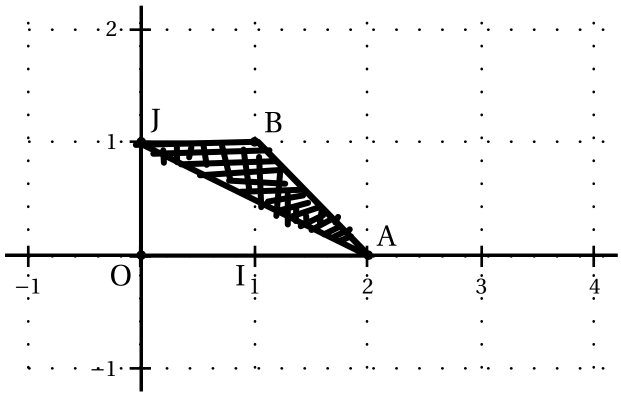


Figure 4

1. On utilise différentes transformations du plan pour réaliser le pavage. On effectuera tous les tracés demandés sur l'annexe 4.

   a. Construire le symétrique de OABJ par rapport à l'axe (OA) en nommant respectivement C et D les symétriques de B et J.

   b. Construire le symétrique du polygone ABJDC par rapport au point A.

   c. Construire l'image, par la rotation de centre A et d'angle 90°dans le sens antihoraire, des deux polygones obtenus précédemment.

   Quelle est l'image du segment [AB] par cette rotation ? Justifier la réponse.

   l'image de [AB] est [AC], car A est invariant, et B se transforme en C.

   L'ensemble constitue alors un motif M constitué de quatre pentagones.

   d. Déterminer deux translations qui, appliquées successivement, permettent de paver le plan à partir du motif M : tracer sur l'annexe 4 un représentant des vecteurs de chacune de ces translations.

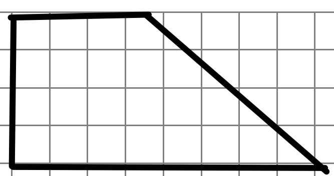
   Paver ainsi la zone rectangulaire délimitée par les pointillés en annexe 4.

2. Dans l'élément de base T, on souhaite teinter le triangle ABJ en noir et le triangle OAJ en blanc, pour faire en sorte que le pavage ne soit pas uni.

   a. Sur l'annexe 4, griser les parties du parquet teintées en noir.

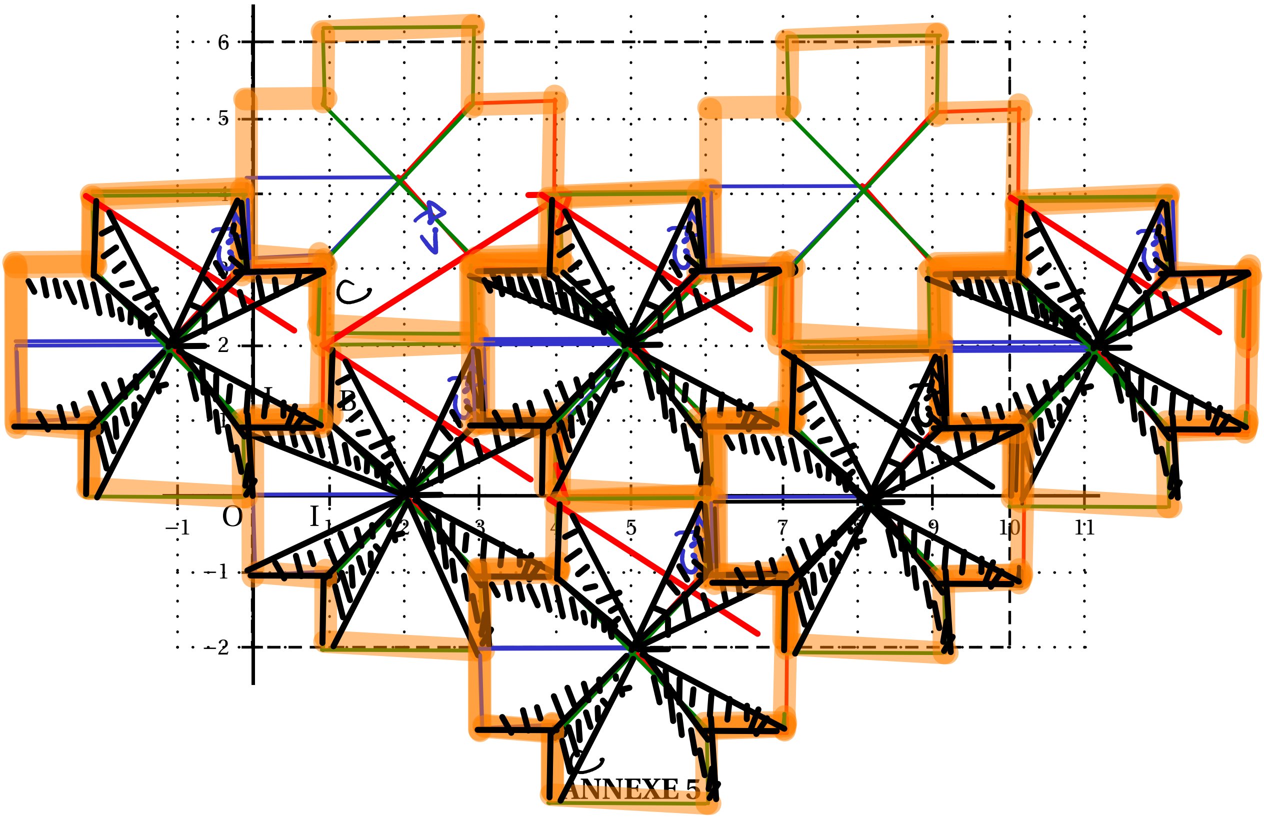
3. Un autre motif de parquet est représenté en annexe 5.

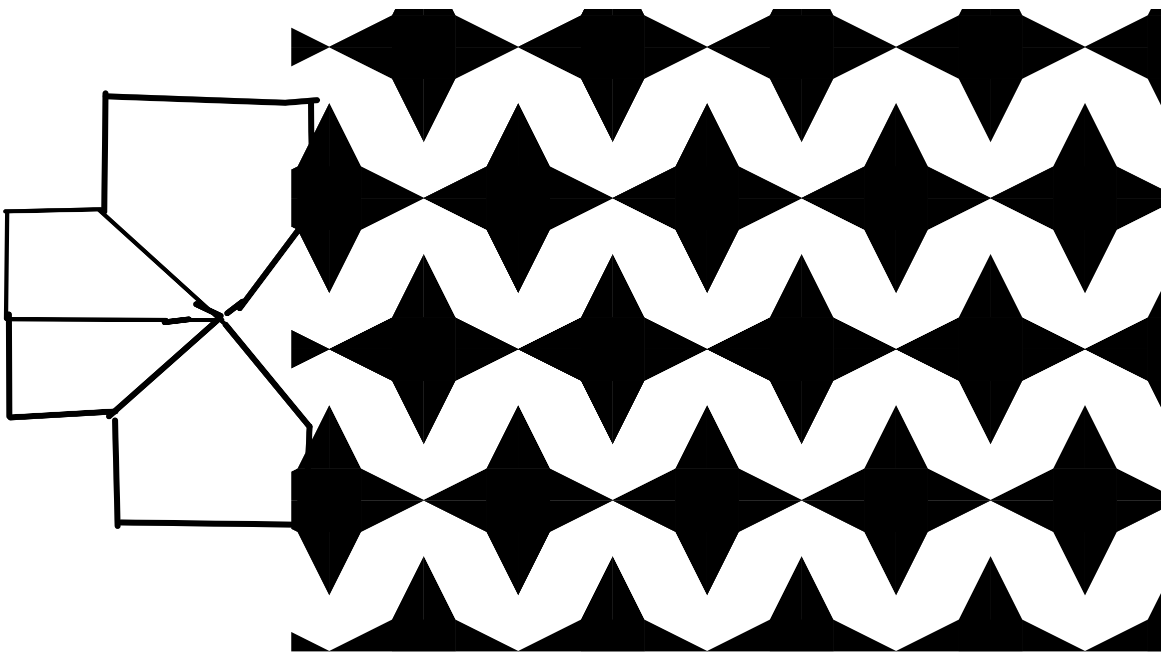
   Comment colorier l'élément de base T pour obtenir, par le même procédé de construction du motif M, le pavage fourni en annexe 5 ?



ANNEXE 4

(à rendre avec la copie)



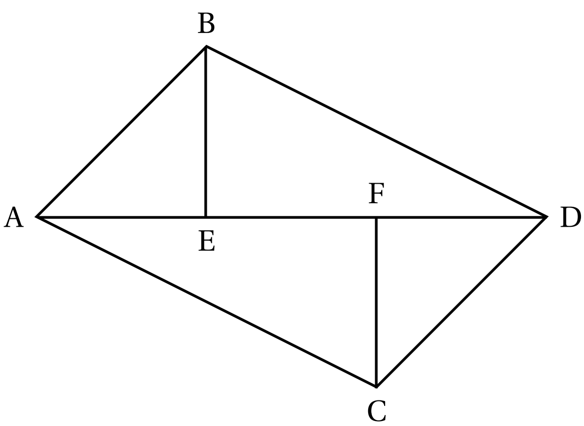


Exercice 3

Les parties A et B sont indépendantes

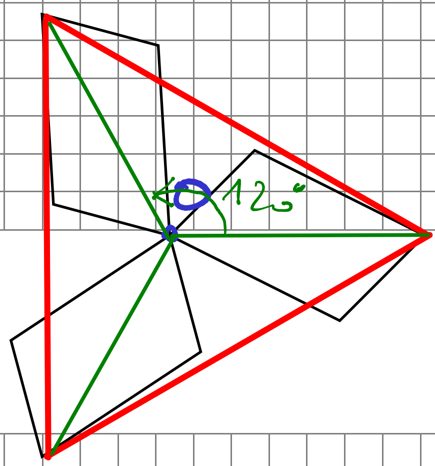
Partie A : motif Hélice

On considère le parallélogramme ABDC ci-contre.
On sait que AE = EF = FD = EB = FC.
Les droites (BE) et (FC) sont perpendiculaires à (AD).



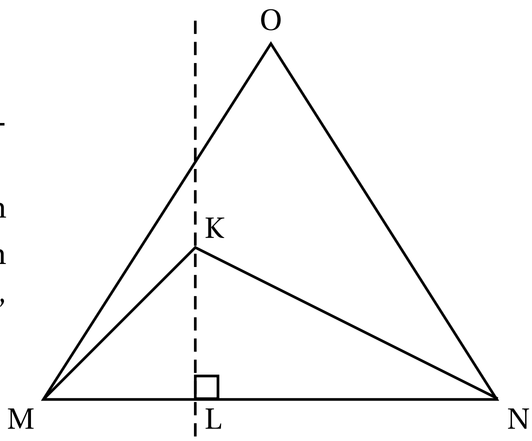
1. On considère le motif hélice ci-contre. Sachant que les trois sommets de cette hélice forment un triangle équilatéral, par quelles transformations peut-on obtenir ce motif à partir du parallélogramme précédent ?

rotation de centre O, d'angle 120° dans le sens horaire.



2. Par quelles transformations obtient-on le décor présenté en annexe 4 à partir du motif hélice ? On pourra placer et nommer sur l'annexe 4 des points pour définir précisément ces transformations.

Partie B : motif Étoile

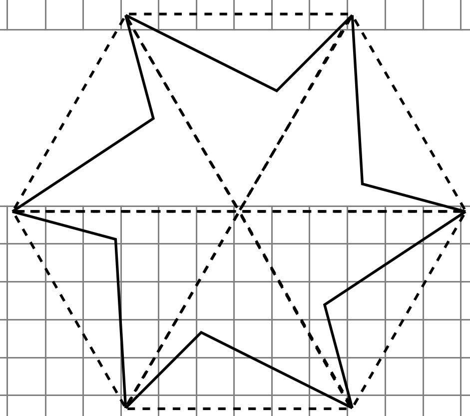


On considère un triangle équilatéral MNO (voir figure ci-contre).

Soit L le point du segment [MN] tel que $ML = \frac{1}{3}MN$. On considère la droite (d) perpendiculaire au segment [MN] en L. Soit K le point situé sur (d), à l'intérieur du triangle MNO, et tel que LK = ML.

1. On considère le polygone
$P = A_0A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8A_9A_{10}A_{11}$ ci-contre, correspondant au motif étoile. Tous les triangles en pointillés sont identiques.

Comment construire ce polygone P à partir du triangle MNK défini précédemment ?

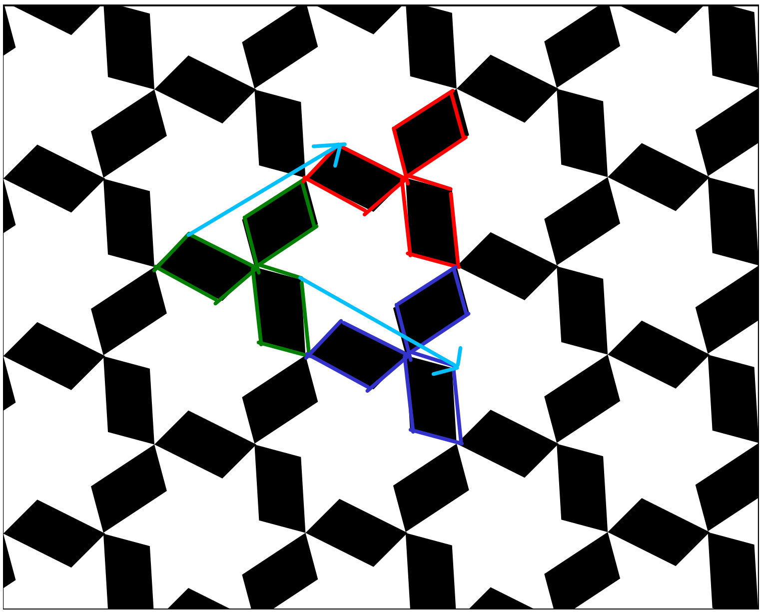


2. Quelle est la nature du polygone
$H = A_0A_2A_4A_6A_8A_{10}$?
Justifier la réponse.

3. On suppose que le segment $[A_0A_2]$ mesure 3 centimètres.
Déterminer l'aire du polygone P.

Partie C : pavage

Un carreleur veut obtenir le résultat suivant :



1. 1er cas : Il peut uniquement disposer de carreaux monochromes, de la forme qu'il souhaite. Peut-il réaliser ce pavage en utilisant ensemble des carreaux blancs tous identiques et des carreaux noirs tous identiques ?

   Si oui, préciser la forme et la couleur des carreaux nécessaires.

2. 2e cas : Il peut uniquement disposer d'une seule sorte de carreaux bicolores, blancs et noirs, tous identiques. Est-il possible d'obtenir le résultat souhaité ?

   Si oui, tracer sur la copie un carreau qui convient et le colorier. Quelles transformations doit-on alors appliquer pour obtenir le pavage à partir de ce carreau ?

Annexe 4, à rendre avec la copie